Note sur le moment magnétique

Le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'un objet est défini comme le vecteur dont le produit vectoriel par le champ magnétique externe $\vec{B}$ donne le moment $\vec{\mathcal{M}}$ de la force que subit l'objet :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Pour une particule de masse m, de charge q, de vitesse $\vec{v}$ et de moment orbital $\vec{L}$ on a :

$$\vec{\mu} = \frac{q\vec{L}}{2m} = \frac{1}{2}q(\vec{r} \times \vec{v}).$$

En coordonnées cylindriques, avec $\vec{L}$ suivant Oz, et en notant $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire, on obtient :

$$\vec{\mu} = \frac{qr^2\dot{\theta}}{2}\vec{e_z}.$$

On peut le montrer en modélisant la charge en rotation par une petite boucle de courant circulaire, de rayon r, et d'intensité :

$$I = \rho\vec{v} \text{ où } \rho = \frac{q}{2\pi r}.$$

Le moment de la force de Laplace sur le circuit $\mathcal{C}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= \int_{\mathcal{C}} \vec{r} \times (\rho \mathrm{d}\vec{l}\, r\dot{\theta} \times \vec{B}) \\ &= \int_{\mathcal{C}} [(\vec{r} \cdot \vec{B})(\rho r\dot{\theta})\mathrm{d}\vec{l} - (\vec{r} \cdot \rho\mathrm{d}\vec{l}\, r\dot{\theta})\vec{B}].\end{aligned}$$

Le second terme est nul. Avec l'axe du circuit suivant Oz, on a :

$$\mathrm{d}\vec{l} = \begin{pmatrix} -rs\mathrm{d}\theta \\ rc\mathrm{d}\theta \end{pmatrix},$$

où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$.

Il vient :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta (rcB_x + rsB_y)\rho\dot{\theta}r \begin{pmatrix} -rs\mathrm{d}\theta \\ rc\mathrm{d}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \rho\dot{\theta}r^3 \begin{pmatrix} -\pi B_y \\ \pi B_x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{qr^2\dot{\theta}}{2} \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\mu} \times \vec{B},
\end{aligned}$$

c'est la relation cherchée.
Par symétrie, la force de Laplace appliquée sur la boucle est nulle si $\vec{B}$ est constant. Si $\vec{B}$ est lentement variable sur la surface de la boucle de courant, on peut calculer la force en développant $\vec{B}$ au premier ordre en r :

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{C}} \rho \mathrm{d}\vec{l}\, r\dot{\theta} \times \vec{B}(\vec{r}).$$

Il est avantageux de faire le calcule explicite avec les composantes. On ne doit prendre en compte que la variation de $\vec{B}$: $B_k(\vec{r}) = \vec{\nabla} B_k(\vec{0}) \cdot \vec{r}$. Il vient, en utilisant le symbole de Levi-Civita ϵ_{ijk} :

$$\begin{aligned}
F_i &= \int_{\mathcal{C}} \rho r\dot{\theta}\epsilon_{ijk}\mathrm{d}l_j(\vec{\nabla} B_k(\vec{0}) \cdot \vec{r}) \\
&= \int_{\mathcal{C}} \rho r^2\dot{\theta}\epsilon_{ijk}\mathrm{d}l_j(\partial_x B_k c + \partial_y B_k s).
\end{aligned}$$

On finit le calcul composante par composante, en remarquant que $\mathrm{d}l_3 = 0$ et que seules les intégrales sur les carrés des sinus ou cosinus sont différentes de 0 :

$$\begin{aligned}
F_x &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \rho r^2 \dot{\theta}\, rc(\partial_x B_z c + \partial_y B_z s) = \rho r^3 \dot{\theta}\pi\partial_x B_z \\
F_y &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \rho r^2 \dot{\theta}\, rs(\partial_x B_z c + \partial_y B_z s) = \rho r^3 \dot{\theta}\pi\partial_y B_z \\
F_z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \rho r^2 \dot{\theta}\, [-rs(\partial_x B_y c + \partial_y B_y s) - rc(\partial_x B_x c + \partial_y B_x s)] \\
&= -\rho r^3 \dot{\theta}\pi(\partial_y B_y + \partial_x B_x) \\
&= \rho r^3 \dot{\theta}\pi\partial_z B_z \text{ car } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, il vient en revenant à une notation vectorielle et indépendante du repère :

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Dans cette approximation, la force dérive du potentiel :

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$